

Prova de Conhecimentos Específicos

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos)



Sejam  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente, o cubo circunscrito e o cubo inscrito em uma esfera de raio 1m. Determine os volumes de  $C_1$  e  $C_2$ . Justifique a sua resposta.

Cálculos e resposta:

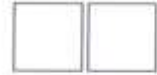
A medida de uma aresta do cubo circunscrito é 2m, portanto, o volume de  $C_1$  é  $8\text{m}^3$ .

A medida de uma aresta  $a$  do cubo inscrito satisfaz a equação  $2^2 = a^2 + (\sqrt{2}a)^2$ , portanto

$a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ . Assim, o volume de  $C_2$  é  $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{8}{3\sqrt{3}}\text{m}^3$ .

## PROGRAD / COSEAC - Matemática

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos)



Carlos ganhou no seu aniversário R\$ 150,00 de seus pais para comprar o seu presente. Ao entrar em uma loja, verificou que, se comprasse uma camisa, uma calça e uma bermuda, gastaria exatamente os R\$150,00. Se comprasse duas camisas e uma bermuda, sobrariam R\$ 15,00. No entanto, percebeu que não poderia comprar uma calça e duas bermudas: faltariam R\$ 3,00. Considerando que, em todas as opções, as camisas escolhidas têm o mesmo valor, a calça escolhida foi sempre a mesma e que as bermudas escolhidas também têm o mesmo valor, determine o valor de cada uma das peças do vestuário (o valor da calça, o valor da camisa e o valor da bermuda). Justifique a sua resposta.

Cálculos e resposta:

Seja  $x$  o preço de uma camisa,  $y$  o preço de uma calça, e  $z$  o preço de uma bermuda.

$$\text{Tem-se: } \begin{cases} x + y + z = 150 \\ 2x + z = 135 \\ y + 2z = 153 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontra-se:  
 $x=44$ ,  $y=59$ ,  $z=47$ .

**PROGRAD / COSEAC - Matemática**

**3ª QUESTÃO: (2,0 pontos)**



A média aritmética das idades dos funcionários (homens e mulheres) de uma empresa é igual a 39 anos. Sabe-se que 60% dos funcionários são mulheres e que a média aritmética das idades dos homens é igual a 45 anos. Determine a média aritmética das idades das mulheres. Justifique a sua resposta.

Cálculos e respostas:

Seja  $T$  o número total de funcionários e  $m$  a média aritmética da idade das mulheres. Tem-se:

$$\frac{\frac{60}{100} T \cdot m + \frac{40}{100} T \cdot 45}{T} = 39 \Leftrightarrow \frac{60}{100} \cdot m + \frac{40}{100} \cdot 45 = 39 \Leftrightarrow m = 35.$$

4ª QUESTÃO: (2,0 pontos)



Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4})$ . Determine:

- a) os valores de  $x$  para os quais  $f(x) = 0$ . Justifique a sua resposta.
- b) o valor mínimo de  $f$  e o valor máximo de  $f$ . Justifique a sua resposta.
- c) o período de  $f$ . Justifique a sua resposta.

Cálculos e respostas:

a) Tem-se:

$$f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \sin[2(x - \frac{\pi}{4})] = \frac{1}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{2}). \text{ Portanto,}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{2} = n\pi, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

b) Como os valores mínimo e máximo da função seno são, respectivamente,  $-1$  e  $1$ , os valores mínimo e máximo de  $f$  são, respectivamente,  $-\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2}$ .

$$c) f(x) = f(x + p) \Leftrightarrow \sin(2x - \frac{\pi}{2}) = \sin(2x + 2p - \frac{\pi}{2}).$$

Como o período da função seno é  $2\pi$ , tem-se  $2p = 2\pi$ , portanto, o período de  $f$  é  $\pi$ .

5ª QUESTÃO: (2,0 pontos)



Determine todos os valores reais de  $x$  tais que  $x^{\ln(x)} = 2$ . Justifique a sua resposta.

Cálculos e resposta:

$$x^{\ln(x)} = 2 \Leftrightarrow \ln(x) \cdot \ln(x) = \ln(2) \Leftrightarrow \ln(x) = \sqrt{\ln 2} \text{ ou } \ln(x) = -\sqrt{\ln 2} .$$

$$\text{Portanto, } x = e^{\sqrt{\ln(2)}} \text{ ou } x = e^{-\sqrt{\ln(2)}} .$$