UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

TRANSFERÊNCIA – 2º semestre letivo de 2010 e 1º semestre letivo de 20101

CURSO de MATEMÁTICA (Niterói) - Gabarito

INSTRUÇÕES AO CANDIDATO

- Verifique se este caderno contém:
  PROVA DE **REDAÇÃO** – com uma proposta;
  PROVA DE **CONHECIMENTOS ESPECÍFICOS –** com questões discursivas, totalizando dez pontos.
- Se este caderno não contiver integralmente o descrito no item anterior, notifique imediatamente ao fiscal.
- No espaço reservado à identificação do candidato, além de assinar, preencha o campo respectivo com seu nome.
- Não é permitido fazer uso de instrumentos auxiliares para o cálculo e o desenho, portar material que sirva para consulta nem equipamento destinado à comunicação.
- Na avaliação do desenvolvimento das questões será considerado somente o que estiver escrito a caneta, com tinta azul ou preta, nos espaços apropriados.
- O tempo disponível para realizar as provas é de quatro horas.
- Ao terminar, entregue ao fiscal este caderno devidamente assinado. Tanto a falta de assinatura quanto a assinatura fora do local apropriado poderá invalidar sua prova.
- Certifique-se de ter assinado a lista de presença.
- Colabore com o fiscal, caso este o convide a comprovar sua identidade por impressão digital.
- Você deverá permanecer no local de realização das provas por, no mínimo, noventa minutos.

AGUARDE O AVISO PARA O INÍCIO DA PROVA

RESERVADO À IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO

NOME

ASSINATURA : ______________________

RESERVADO AOS AVALIADORES

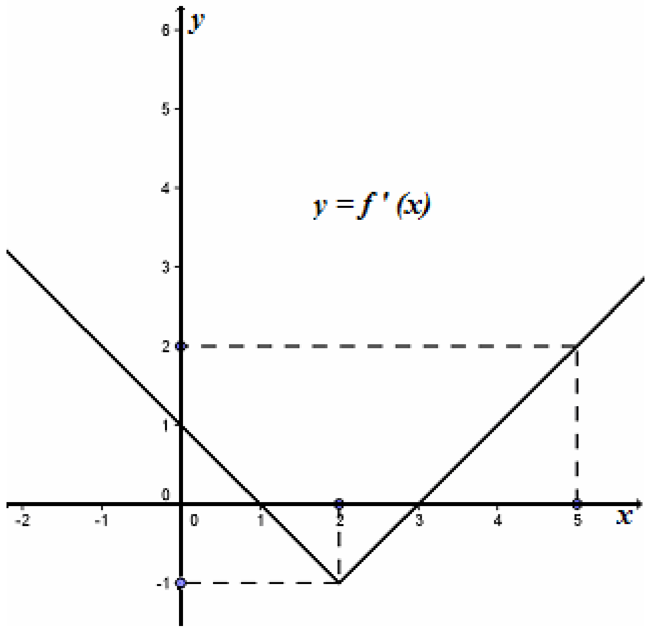
REDAÇÃO			rubrica: ____________
C. ESPECÍFICOS			rubrica: ____________

PROAC / COSEAC - Gabarito

Prova de Conhecimentos Específicos

1ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

A curva a seguir, formada por duas semirretas, representa o gráfico da **derivada** de uma função real *f*.



Sabe-se que *f*(0)=-2.

a) Esboce o gráfico da derivada segunda de *f*; isto é, *f''*.
b) Determine *f* (2).
c) Esboce o gráfico da função *f*.

Cálculos e respostas:

A partir do gráfico, pode-se concluir que $f'(x) = |x-2| - 1 = \begin{cases} x-3, x>2 \\ -1, x=2 \\ -x+1, x<2 \end{cases}$.

Consequentemente, $f''(x) = \begin{cases} 1, x>2 \\ -1, x<2 \end{cases}$.

Em $x=2$, tem-se: $f''_{+}(2) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f'(x)-f'(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-3+1}{x-2} = 1$ e

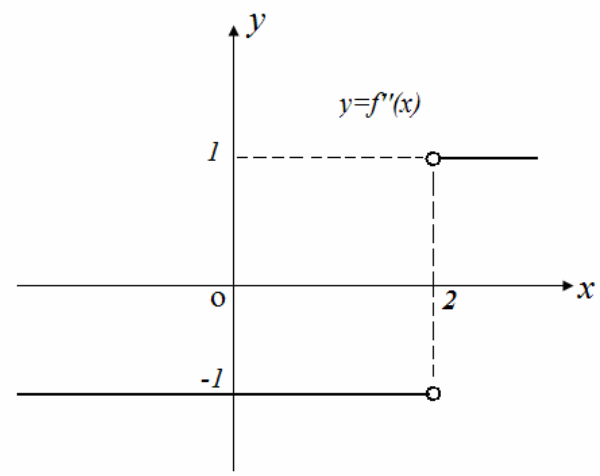
$f''_{-}(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f'(x)-f'(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-x+1+1}{x-2} = -1$.

Portanto, f' não é derivável em $x=2$.

PROAC / COSEAC - Gabarito

Cálculos e respostas:

O gráfico de f'' é mostrado na figura:



b) Nota-se que *f '* existe para todos os números reais. Portanto, *f* é uma função contínua e derivável em todo o conjunto dos Reais.
Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se:

$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}-3x+C_1, x>2 \\ C_2, x=2 \\ -\frac{x^2}{2}+x+C_3, x<2 \end{cases}$. Como, $f(0)=-2$, conclui-se que $C_3=-2$.

Como f é contínua em $x=2$, tem-se

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)=C_2 \Leftrightarrow -4+C_1=C_3=C_2=-2.$$

Logo, $C_1=2, C_2=-2$ e $C_3=-2$. Portanto, $f(2)=-2.$

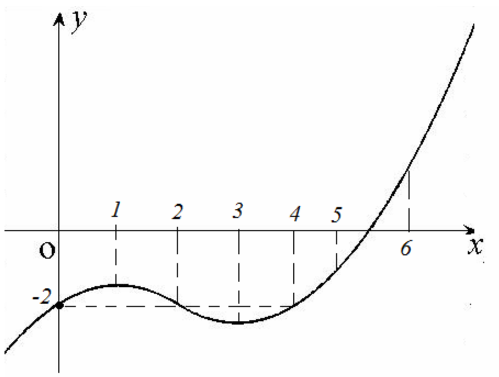
c) Pelos cálculos do item b), tem-se que

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}-3x+2, x>2 \\ -2, x=2 \\ -\frac{x^2}{2}+x-2, x<2 \end{cases}.$$

PROAC / COSEAC - Gabarito

Cálculos e respostas:

O esboço do gráfico de f é mostrado a seguir:



PROAC / COSEAC - Gabarito

2ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Considere o conjunto $\alpha = \{(1,-1),(2,2)\}$ formado por vetores do $\mathbb{R}^2$.

a) Mostre que α é uma base do $\mathbb{R}^2$.

b) Seja $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Encontre a matriz mudança de base, da base α para a base β.

c) Seja T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que T(1,-1)=(1,0) e T(2,2)=(0,1). Escreva a relação entre a matriz que representa T com a matriz mudança de base encontrada no item b) e determine a expressão de T(x,y).

Cálculos e respostas:

a) Como Dim $\mathbb{R}^2$ = 2, basta verificar se os vetores da base α são linearmente independentes. Para isso, calcula-se o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Logo, os vetores são L.I. e α é uma base do $\mathbb{R}^2$.

b) Tem-se $(1,-1) = a_1(1,0) + a_2(0,1)$ e $(2,2) = b_1(1,0) + b_2(0,1)$.

Assim, $a_1 = 1$ e $a_2 = -1$. Também, $b_1 = 2$ e $b_2 = 2$.

A matriz mudança de base é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

c) Observa-se que a matriz que representa T é a inversa da matriz mudança de base encontrada em b). Assim,

$$T = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $T(x,y) = \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2}, \frac{x}{4} + \frac{y}{4} \right)$.

PROAC / COSEAC - Gabarito

3ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Considere o ponto A = (1,2) $\in \mathbb{R}^2$ e o vetor $\vec{u} = (-1,1)$.

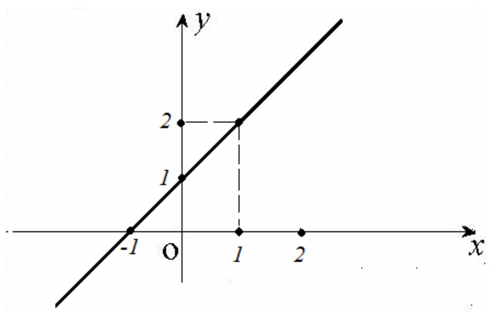
a) Determine um ponto B $\in \mathbb{R}^2$ tal que o vetor $\overrightarrow{AB}$ seja perpendicular ao vetor $\vec{u}$.

b) Determine o lugar geométrico de todos os pontos P = (x,y) do plano xy tal que o vetor $\overrightarrow{AP}$ seja perpendicular ao vetor $\vec{u}$. Faça um esboço do lugar geométrico.

Cálculos e respostas:

a) Seja $B = (x, y)$. Assim, $\overrightarrow{AB} = (x-1, y-2)$. Para que $\overrightarrow{AB}$ seja perpendicular ao vetor $\vec{u}$, deve-se ter $\overrightarrow{AB} . \vec{u}$=0. Logo, $-x+1+y-2=0 \Leftrightarrow y = x+1$. Pode-se escolher, por exemplo, $x=1$ e $y=2$.

b) Aproveitando a relação obtida no item a), conclui-se que a equação do lugar geométrico é $y = x+1$, que é a equação de uma reta cujo gráfico é mostrado na figura a seguir:



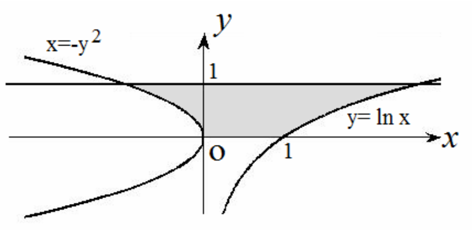
PROAC / COSEAC - Gabarito

4ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Calcule a área da região limitada pelas curvas de equações $x = -y^2$, $y = \ln x$, y = 0 e y = 1. Faça um esboço da região.

Cálculos e respostas:

O gráfico da região é mostrado na figura a seguir:



A área da região é dada por

$$\int_0^1 (e^y + y^2)dy = e^y + \frac{y^3}{3}\Big]_0^1 = e - \frac{2}{3} \text{ u.a.}$$

PROAC / COSEAC - Gabarito

5ª QUESTÃO: (2,0 pontos)

Identifique e esboce a curva de equação

$$7x^2 + 16y^2 - 28x - 128y + 172 = 0.$$

Cálculos e respostas:

Tem-se

$$7x^2 + 16y^2 - 28x - 128y + 172 = 0 \Leftrightarrow 7(x^2 - 4x + 4 - 4) + 16(y^2 - 8y + 16 - 16) + 172 = 0 \Leftrightarrow 7(x-2)^2 + 16(y-4)^2 = 112.$$

Dividindo toda a equação por 112, chega-se na equação $\dfrac{(x-2)^2}{16} + \dfrac{(y-4)^2}{7} = 1.$

A curva dada pela equação acima é uma elipse de centro em (2,4) e semieixos (maior e menor, respectivamente) de comprimentos 4 e $\sqrt{7}$.

O gráfico da elipse é mostrado na figura a seguir: